

تمرین های درس ریاضی ۲

محسن کیان

۲۳ اردیبهشت ۱۳۹۲

۱. مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_R (x^2 + xy) dA$ که در آن R الف. ناحیه محدود به منحنی های $y = 2x$ ، $y = x^2$ و $x = 1$ می باشد.
ب. ناحیه محدود به منحنی های $y^2 = 4 - x$ و $y^2 = 4 - 4x$ می باشد.
ج. ناحیه داخل دایره $r = 2 \sin \theta$ می باشد.
۲. مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_R (x - y) dA$ که در آن R ناحیه خارج $r^2 = 8 \cos 2\theta$ و داخل $r = 4 \sin \theta$ است.
۳. هریک از انتگرال های زیر را با تعویض ترتیب انتگرال گیری حل کنید.
- (i) $\int_0^1 \int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dx dy$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_y^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{x} dx dy$
- (iii) $\int_0^8 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} dy dx$ (iv) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos y^3 dy dx$
۴. مساحت محدود به منحنی $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ را محاسبه کنید.
۵. مطلوبست محاسبه حجم ناحیه D که D الف. ناحیه محدود به رویه های $z = a - x + y$ ، $z = a - \frac{x^2}{a}$ و $x = 0$ و $y = 0$ است.
ب. ناحیه محدود به استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و صفحه $z = y$ در $\frac{1}{\lambda}$ اول مختصات.
ج. ناحیه درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ و استوانه $x^2 + z^2 = 2az$.
د. ناحیه محدود به سهمی گون $z = 2x^2 + y^2$ ، صفحه xy و رویه های $y = x^2$ و $x = y^2$.
۶. مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ را که بین صفحات $z = 1$ و $z = 2$ قرار دارد را

بیابید.

۷. مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ را که درون استوانه $x^2 + y^2 = 2ax$ قرار دارد را بیابید.

۸. مساحت قسمتی از رویه $z = \sqrt{4 - x^2}$ را که توسط صفحه های $x = 1$ و $y = 2$ در $\frac{1}{8}$ اول مختصات بریده شده است را بدست آورید.

۹. مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ را که درون استوانه $z^2 + y^2 = a^2$ قرار دارد را بیابید.

۱۰. مطلوبست محاسبه انتگرال رویه ای $\iint_S (xy + z) dS$ که در آن رویه S قسمتی از صفحه $2x - y + z = 1$ است که توسط صفحات $x = 1$ ، $y = 0$ و $y = x$ قطع شده است.

۱۱. مطلوبست محاسبه انتگرال رویه ای $\iint_S (x + y + z) dS$ که در آن رویه S قسمتی از مخروط $x^2 = y^2 + 4z^2$ است که توسط صفحات $x = 1$ و $x = 3$ بریده شده است.

۱۲. با استفاده از قضیه گرین، انتگرال خط $\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$ را محاسبه کنید که در آن C منحنی فصل مشترک دو رویه $x^2 = y^2$ و $x = y^2$ است.

۱۳. رویه های پارامتری شده زیر را در دستگاه مختصات دکارتی مشخص کنید.

$$(i) \quad r(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (3 + v)\mathbf{j} + (1 + 4u + 5v)\mathbf{k}$$

$$(ii) \quad x = \sin v, \quad y = \cos u \sin 4v, \quad z = \sin 2u \sin 4v, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{\pi}{4}$$

۱۴. معادله پارامتری هر یک از رویه های زیر را به دست آورید.

الف. نیمه پایین بیضی گون به معادله $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$.

ب. قسمتی از استوانه $y^2 + z^2 = 16$ که بین صفحات $x = 0$ و $x = 3$ قرار گرفته است.

ج. قسمتی از صفحه $z = x + 3$ که درون استوانه $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد.

د. قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ که بالای رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ قرار گرفته است.

۱۵. با استفاده از قضیه استوکس، انتگرال $\iint_S \text{curl} F \cdot dS$ را محاسبه کنید که در آن

الف. رویه S نیم کره بالایی $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ است و $F(x, y, z) = 2y \cos z \mathbf{i} + e^x \sin z \mathbf{j} + xe^y \mathbf{k}$

ب. رویه S شامل تمام وجه های به جز وجه پایین مکعب به رأس های $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ است و

$$F(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + x^2yz\mathbf{k}$$

۱۶. با استفاده از قضیه استوکس، انتگرال $\int_C F \cdot dr$ را محاسبه کنید که در آن

الف. منحنی C مرز قسمتی از صفحه $2x + y + 2z = 2$ است که در $\frac{1}{8}$ اول مختصات قرار دارد و

$$F(x, y, z) = e^{-x}\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$$

ب. منحنی C مثلث به رأس های $(1, 0, 0)$ و $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ است و

$$F(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$$

۱۷. با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان برداری $F(x, y, z) = 3xy^2\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ در

امتداد رویه S را محاسبه کنید که S رویه جسم محدود به استوانه $y^2 + z^2 = 1$ و صفحات $x = -1$

و $x = 2$ است.