دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

تبدیلات لاپلاس

محسن کیان

Mohsen Kian

Email: kian@ub.ac.ir & kian@member.ams.org

url: http://ub.ac.ir/Pages/Public/Teacher.aspx?TeacherID=88

۱

تبدیلات لاپلاس

یکی از روش‌هایی که برای حل معادلات دیفرانسیل به کار می‌رود، استفاده از تبدیلات لاپلاس می‌باشد. تبدیلات لاپلاس در بسیاری از شاخه‌های دیگر علوم نیز کاربرد دارند.

۱.۱ تعریف تبدیل لاپلاس

تعریف ۱.۱.۱. *یک تبدیل انتگرالی، رابطه‌ای است به صورت*

$$F(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

که یک تابع مثل $f(t)$ را به یک تابع دیگر مثل F تبدیل می‌کند. K را هسته این تبدیل می‌نامند. دامنه F مجموعه همه s هایی است که به ازای آن‌ها انتگرال فوق وجود داشته باشد.

تبدیل لاپلاس نیز یک تبدیل انتگرالی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنیم تابع f روی بازه $[\circ, \infty)$ تعریف شده باشد. تبدیل لاپلاس f تابعی است مانند F که به صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$F(s) = \int_\circ^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

که در آن s متغیر تابع F است. دامنه تابع F مجموعه همه s هایی است که به ازای آنها انتگرال ناسره فوق همگراست. یعنیs هایی که به ازای آنها حد $\lim_{r\to\infty}\int_\circ^r e^{-sx}f(x)dx$ وجود دارد. تبدیل لاپلاس تابع f را با نماد $\mathcal{L}[f(x)]$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_\circ^\infty e^{-sx}f(x)dx = F(s).$$

تبدیل لاپلاس توابع مقدماتی. ابتدا تبدیل لاپلاس تعدادی از توابع مقدماتی را با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس به دست می‌آوریم. در ادامه با استفاده از خواص تبدیلات لاپلاس، توابع بیشتری را بررسی کرده و جز در مواردی خاص، دیگر از تعریف استفاده نخواهیم کرد.

مثال ۳.۱.۱. *تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = ۱$ را به دست آورید.*

$$\mathcal{L}[۱] = \int_\circ^\infty e^{-sx}dx = -\frac{۱}{s}e^{-sx}|_\circ^\infty = \frac{۱}{s} \quad (s > \circ)$$

مثال ۴.۱.۱. *تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=x$ را به دست آورید.*

$$\mathcal{L}[x]=\int_{۰}^{\infty}e^{-sx}xdx=-\frac{۱}{s}xe^{-sx}|_{۰}^{\infty}+\frac{۱}{s}\int_{۰}^{\infty}e^{-sx}dx=-\frac{۱}{s^{۲}}e^{-sx}|_{۰}^{\infty}=\frac{۱}{s^{۲}}.$$

دقت کنید که در انتگرال فوق از روش جز به جز با $u=x$ و $dv=e^{-sx}dx$ استفاده کرده‌ایم. همچنین با فرض $s>۰$ داریم $-\frac{۱}{s}xe^{-sx}|_{۰}^{\infty}=۰$. زیرا

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-sx}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{sx}}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{se^{sx}}=۰.$$

مثال ۵.۱.۱. *تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=x^n,\ \ (n\in\mathbb{N})$ را به دست آورید.*

حل. *با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز داریم*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^n] &= \int_{۰}^{\infty}e^{-sx}x^ndx \qquad (x^n=u,\quad e^{-sx}dx=dv)\\ &= -\frac{۱}{s}x^ne^{-sx}|_{۰}^{\infty}+\frac{n}{s}\int_{۰}^{\infty}e^{-sx}x^{n-۱}dx\\ &= \frac{n}{s}\mathcal{L}[x^{n-۱}]\end{aligned}$$

اگر روابط فوق را برای تابع $f(x)=x^{n-۱}$ به کار ببریم داریم $\mathcal{L}[x^{n-۱}]=\frac{n-۱}{s}\mathcal{L}[x^{n-۲}]$. با ادامه این روند به دست می‌آوریم $\mathcal{L}[x^{n-۲}]=\frac{n-۲}{s}\mathcal{L}[x^{n-۳}]$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^n] &= \frac{n}{s}\mathcal{L}[x^{n-۱}]\\ &= \frac{n}{s}.\frac{n-۱}{s}\mathcal{L}[x^{n-۲}]\\ &= \frac{n}{s}.\frac{n-۱}{s}.\frac{n-۲}{s}\mathcal{L}[x^{n-۳}]\\ &= \frac{n}{s}.\frac{n-۱}{s}.\frac{n-۲}{s}...\frac{n-(n-۱)}{s}\mathcal{L}[x^{n-n}]\\ &= \frac{n}{s}.\frac{n-۱}{s}.\frac{n-۲}{s}...\frac{۱}{s}\mathcal{L}[۱]\\ &= \frac{n!}{s^{n+۱}}\quad (s>۰).\end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{L}[x^n]=\frac{n!}{s^{n+۱}}$.

نکته ۶.۱.۱. اگر α یک عدد گویا باشد آنگاه

$$\mathcal{L}[x^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

زیرا

$$\mathcal{L}[x^\alpha] = \int_0^\infty e^{-sx}x^\alpha dx = \int_0^\infty e^{-t}(\frac{t}{s})^\alpha \frac{dt}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

مثال ۷.۱.۱. تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=e^{ax}$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{ax}] = \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}dx &= \int_0^\infty e^{-(s-a)x}dx \\ &= -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)x}|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \quad (s>a).\end{aligned}$$

مثال ۸.۱.۱. تبدیل لاپلاس توابع $f(x)=\sin ax$ و $g(x)=\cos ax$ را به دست آورید.

حل. با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin ax] &= \int_0^\infty e^{-sx}\sin ax dx \qquad (\sin ax = u, \quad e^{-sx}dx = dv) \\ &= -\frac{1}{s}e^{-sx}\sin ax|_0^\infty + \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\cos ax dx \\ &= \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\cos ax dx\end{aligned}$$

دقت کنید که $-\frac{1}{s}e^{-sx}\sin ax|_0^\infty = 0$. زیرا تابع سینوس کراندار است و $\lim_{x\to\infty} e^{-sx} = 0$. در نتیجه $\lim_{x\to\infty} e^{-sx}\sin ax = 0$. برای حل انتگرال $\int_0^\infty e^{-sx}\cos ax dx$، دوباره از جز به جز استفاده می‌کنیم. با انتخاب $e^{-sx}dx = dv$ و $\cos ax = u$ داریم $du = -a\sin axsx$ و $v = -\frac{1}{s}e^{-sx}$. بنابراین

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin ax] &= \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\cos ax dx \\ &= \frac{a}{s}\left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\cos ax|_0^\infty - \frac{a}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\sin ax dx\right) \\ &= \frac{a}{s}\left(-(0-\frac{1}{s}) - \frac{a}{s}\mathcal{L}[\sin ax]\right) \\ &= \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2}\mathcal{L}[\sin ax].\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathcal{L}[\sin ax] + \frac{a^۲}{s^۲}\mathcal{L}[\sin ax] = \frac{a}{s^۲} \;\longrightarrow\; \mathcal{L}[\sin ax]\left(۱ + \frac{a^۲}{s^۲}\right) = \frac{a}{s^۲}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[\sin ax] = \frac{\frac{a}{s^۲}}{۱ + \frac{a^۲}{s^۲}} = \frac{a}{s^۲ + a^۲}.$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که

$$\mathcal{L}[\cos ax] = \frac{s}{s^۲ + a^۲}.$$

نکته ۹.۱.۱. *به طور خلاصه، تبدیل لاپلاس چند تابع مقدماتی به صورت زیر می‌باشد*

$$\mathcal{L}[۱] = \frac{۱}{s}, \quad (s > ۰) \qquad \mathcal{L}[x] = \frac{۱}{s^۲}, \quad (s > ۰)$$

$$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+۱}}, \quad (s > ۰) \qquad \mathcal{L}[e^{ax}] = \frac{۱}{s-a}, \quad (s > a)$$

$$\mathcal{L}[\sin ax] = \frac{a}{s^۲ + a^۲}, \quad (s > ۰) \qquad \mathcal{L}[\cos ax] = \frac{s}{s^۲ + a^۲}, \quad (s > ۰)$$

مثال ۱۰.۱.۱. *با استفاده از روابط فوق داریم*

$$\mathcal{L}[e^{۴x}] = \frac{۱}{s-۴}, \quad \mathcal{L}[x^۵] = \frac{۵!}{s^۶}, \quad \mathcal{L}[\cos ۳x] = \frac{s}{s^۲+۹}, \quad \mathcal{L}[\sin ۳x] = \frac{۳}{s^۲+۹}.$$

نکته ۱۱.۱.۱. *برای اینکه تابعی مانند f دارای تبدیل لاپلاس باشد، یا اصطلاحا لاپلاس‌پذیر باشد، شرط‌هایی لازم است که معمولا در قضیه‌ای به نام وجود تبدیل لاپلاس مطرح می‌شوند. ما در اینجا به ذکر و اثبات این قضیه نمی‌پردازیم. فقط به بیان یک نکته اکتفا می‌کنیم که اگر تابع f لاپلاس‌پذیر باشد و $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ آنگاه $\lim_{s\to\infty} F(s) = ۰$. به عبارت دیگر اگر $F(s)$ تابعی باشد که $\lim_{s\to\infty} F(s) \neq ۰$، آنگاه نمی‌توان تابعی مانند f یافت بطوری که $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$.*

مثال ۱۲.۱.۱. *چون $\lim_{s\to\infty} \frac{۳s^۲+۱}{s^۲-۴s+۹} = ۳$، بنابراین تابع $F(s) = \frac{۳s^۲+۱}{s^۲-۴s+۹}$ تبدیل لاپلاس هیچ تابعی نمی‌تواند باشد.*

۲.۱ تبدیل معکوس لاپلاس

فرض کنید تابع f لاپلاس‌پذیر باشد و $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. در اینصورت تابع $f(x)$ را تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)$ می‌نامیم و می‌نویسیم $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$. بنابراین متناظر با هر رابطه برای تبدیل لاپلاس، یک رابطه برای تبدیل معکوس لاپلاس داریم.

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(s) \ \rightarrow \ \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x).$$

به عنوان مثال، با استفاده از تبدیل لاپلاس توابع ذکر شده در بخش قبل، می‌توان تبدیل معکوس لاپلاس چند تابع را به صورت زیر به دست آورد.

$$\mathcal{L}[1] = \tfrac{1}{s} \implies \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) = 1$$

$$\mathcal{L}[x^n] = \tfrac{n!}{s^{n+1}} \implies \mathcal{L}^{-1}(\frac{n!}{s^{n+1}}) = x^n$$

$$\mathcal{L}[\cos ax] = \tfrac{s}{s^2+a^2} \implies \mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+a^2}) = \cos ax.$$

مثال ۱.۲.۱.

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{6}{s^4}) = x^3, \qquad \mathcal{L}^{-1}(\frac{4}{s^2+16}) = \sin 4x.$$

اکنون به بیان خواص تبدیلات لاپلاس می‌پردازیم که به کمک آنها می‌توانیم تبدیل لاپلاس توابع بیشتری را محاسبه کنیم. چون متناظر با هر رابطه برای تبدیل لاپلاس، یک رابطه برای تبدیل معکوس لاپلاس وجود دارد، ما خواص تبدیلات لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس را در کنار هم ذکر می‌کنیم.

۳.۱ خواص تبدیلات لاپلاس

۱. خطی بودن. تبدیل لاپلاس خاصیت خطی دارد. یعنی اگر f و g دو تابع لاپلاس‌پذیر باشند و c_1 و c_2 دو ثابت دلخواه باشند، آنگاه داریم

$$\mathcal{L}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \mathcal{L}[f(x)] + c_2 \mathcal{L}[g(x)].$$

نتیجه. تبدیل معکوس لاپلاس نیز خاصیت خطی دارد. یعنی برای هر دو تابع F و G و ثابت‌های c_1 و c_2 داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(c_1F(s)+c_2G(s)) = c_1\mathcal{L}^{-1}(F(s)) + c_2\mathcal{L}^{-1}(G(s)).$$

این خواص را می‌توان مستقیما از تعریف تبدیل لاپلاس نتیجه گرفت.

مثال ۱.۳.۱.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[6x^4+3x^2+x-7] &= 6\mathcal{L}[x^4]+3\mathcal{L}[x^2]+\mathcal{L}[x]-7\mathcal{L}[1]\\ &= 6\frac{4!}{s^5}+3\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{s^2}-7\frac{1}{s}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin^2 x] = \mathcal{L}\left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[1]-\frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2x]\\ &= \frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sinh ax] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{ax}]-\mathcal{L}[e^{-ax}])\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2+1}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\\ &= 1+\sin x.\end{aligned}$$

مثال ۲.۳.۱. *مطلوبست محاسبه* $\mathcal{L}^{-1}(\frac{4s+3}{s^3+s})$.

حل. *ابتدا کسر را تجزیه می‌کنیم. داریم*

$$\frac{4s+3}{s^3+s} = \frac{4s+3}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1)+(Bs+C)s}{s(s^2+1)}$$

برای محاسبه A *و* B *و* C*، در تساوی بالا به جای* s *عدد قرار می‌دهیم.*

$$s=0 \quad\longrightarrow\; A=3$$

$$s=1 \quad\longrightarrow\; 4+3=2A+B+C=6+B+C \;\longrightarrow\; B+C=1$$

$$s=-1 \quad\longrightarrow\; -4+3=2A-(-B+C) \;\longrightarrow\; B-C=-7$$

از دو معادله اخیر به دست می‌آوریم $B=-۳$ و $C=۴$. بنابراین کسر به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$\frac{۴s+۳}{s^۳+s}=\frac{۳}{s}+\frac{-۳s+۴}{s^۲+۱}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-۱}(\frac{۴s+۳}{s^۳+s}) &= \mathcal{L}^{-۱}(\frac{۳}{s})+\mathcal{L}^{-۱}(\frac{-۳s+۴}{s^۲+۱})\\ &= ۳\mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{s})-۳\mathcal{L}^{-۱}(\frac{s}{s^۲+۱})+۴\mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{s^۲+۱})\\ &= ۳-۳\cos x+۴\sin x.\end{aligned}$$

۲. قضیه انتقال. اگر $\mathcal{L}[f(x)]=F(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}[e^{ax}f(x)]=F(s-a).$$

زیرا

$$\mathcal{L}[e^{ax}f(x)]=\int_{\circ}^{\infty}e^{-sx}e^{ax}f(x)dx=\int_{\circ}^{\infty}e^{-(s-a)x}f(x)dx=F(s-a).$$

نتیجه. اگر $\mathcal{L}^{-۱}(F(s))=f(x)$ آنگاه

$$\mathcal{L}^{-۱}\left(F(s-a)\right)=e^{ax}f(x).$$

مثال ۳.۳.۱. چون $\mathcal{L}[x^۲]=\frac{۲!}{s^۳}$، بنابر قضیه انتقال داریم

$$\mathcal{L}[e^{۵x}x^۲]=\frac{۲!}{(s-۵)^۳},\qquad \mathcal{L}[e^{-x}x^۲]=\frac{۲!}{(s+۱)^۳}.$$

همچنین از آنجائیکه $\mathcal{L}[\cos ۲x]=\frac{s}{s^۲+۴}$ و $\mathcal{L}[\sin ۲x]=\frac{۲}{s^۲+۴}$، داریم

$$\mathcal{L}[e^{۳x}\cos ۲x]=\frac{s-۳}{(s-۳)^۲+۴},\qquad \mathcal{L}[e^{۳x}\sin ۲x]=\frac{۲}{(s-۳)^۲+۴}.$$

مثال ۴.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}[e^{-۳x}(۲\cos ۵x-۳\sin ۵x)]$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-۳x}(۲\cos ۵x-۳\sin ۵x)] &= ۲\mathcal{L}[e^{-۳x}\cos ۵x]-۳\mathcal{L}[e^{-۳x}\sin ۵x]\\ &= ۲\frac{s+۳}{(s+۳)^۲+۲۵}-۳\frac{۵}{(s+۳)^۲+۲۵}.\end{aligned}$$

مثال ۵.۳.۱. چون $\mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{s^۲}) = x$، داریم $\mathcal{L}^{-۱}(\frac{۱}{(s-۴)^۲}) = xe^{۴x}$.

مثال ۶.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-۱}(\frac{۲s+۹}{(s+۲)^۲+۱۶})$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۲s+۹}{(s+۲)^۲+۱۶}\right) &= \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۲(s+۲)+۵}{(s+۲)^۲+۱۶}\right)\\ &= ۲\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s+۲}{(s+۲)^۲+۱۶}\right)+\frac{۵}{۴}\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۴}{(s+۲)^۲+۱۶}\right)\\ &= ۲e^{-۲x}\cos ۴x+\frac{۵}{۴}e^{-۲x}\sin ۴x.\end{aligned}$$

مثال ۷.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-۱}(\frac{s-۱}{s^۲+۸s+۲۰})$.

حل. با مربع کامل کردن مخرج کسر داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s-۱}{s^۲+۸s+۲۰}\right) &= \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s-۱}{(s+۴)^۲+۴}\right)=\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s+۴-۵}{(s+۴)^۲+۴}\right)\\ &= \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s+۴}{(s+۴)^۲+۴}\right)-\frac{۵}{۲}\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۲}{(s+۴)^۲+۴}\right)\\ &= e^{-۴x}\cos ۲x-\frac{۵}{۲}e^{-۴x}\sin ۲x.\end{aligned}$$

مثال ۸.۳.۱. مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۲}{\sqrt{s+۱}}\right)$.

حل. داریم

$$\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۲}{\sqrt{s+۱}}\right)=۲\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{(s+۱)^{\frac{۱}{۲}}}\right)=\frac{۲}{\Gamma(\frac{۱}{۲})}e^{-x}x^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۲e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}$$

۳. تبدیل لاپلاس $f(ax)$.

اگر $\mathcal{L}[f(x)]=F(s)$ آنگاه $\mathcal{L}[f(ax)]=\frac{۱}{a}F(\frac{s}{a})$. زیرا

$$\mathcal{L}[f(ax)]=\int_۰^\infty e^{-sx}f(ax)dx=\int_۰^\infty e^{-s\frac{t}{a}}f(t)\frac{dt}{a}=\frac{۱}{a}\int_۰^\infty e^{-\frac{s}{a}t}f(t)dt=\frac{۱}{a}F(\frac{s}{a}).$$

نتیجه. اگر $\mathcal{L}^{-۱}(F(s))=f(x)$ آنگاه $\mathcal{L}^{-۱}(F(as))=\frac{۱}{a}f(\frac{x}{a})$.

مثال ۹.۳.۱. *اگر $f(x)$ تابعی باشد که $\mathcal{L}[f(x)] = \frac{s+۴}{s^۲+۲s-۱}$ آنگاه با استفاده از رابطه بالا می‌توان $\mathcal{L}[f(۵x)]$ را محاسبه کرد. داریم*

$$\mathcal{L}[f(۵x)] = \frac{۱}{۵}\left(\frac{\frac{s}{۵}+۴}{\frac{s^۲}{۵}+\frac{۲s}{۵}-۱}\right).$$

۴. تبدیل لاپلاس مشتق.

هرگاه f' روی هر بازه $[۰, x_۰]$ قطعه به قطعه پیوسته باشد و f و f' هر دو دارای تبدیل لاپلاس باشند و $f(۰)$ وجود داشته باشد آنگاه

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(۰).$$

زیرا با استفاده از انتگرال‌گیری جز به جز داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(x)] = \int_۰^\infty e^{-sx}f'(x)dx &= e^{-sx}f(x)|_۰^\infty + s\int_۰^\infty e^{-sx}f(x)dx \\ &= -f(۰) + s\mathcal{L}[f(x)].\end{aligned}$$

نتیجه. اگر f'' نیز در شرایط قضیه فوق صدق کند، داریم

$$\mathcal{L}[f''(x)] = s^۲\mathcal{L}[f(x)] - sf(۰) - f'(۰).$$

زیرا

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(x)] &= s\mathcal{L}[f'(x)] - f'(۰) \\ &= s\left(s\mathcal{L}[f(x)] - f(۰)\right) - f'(۰) = s^۲\mathcal{L}[f(x)] - sf(۰) - f'(۰).\end{aligned}$$

به طور کلی می‌توان نشان داد

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = s^n\mathcal{L}[f(x)] - s^{n-۱}f(۰) - s^{n-۲}f'(۰) - ... - f^{(n-۱)}(۰).$$

مثال ۱۰.۳.۱. *مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}[xe^x]$.*

حل. *قرار می‌دهیم $f(x) = xe^x$. داریم $f'(x) = e^x + xe^x$ و $f(۰) = ۰$. بنابراین*

$$\mathcal{L}[f'(x)] = \mathcal{L}[e^x + xe^x] = \mathcal{L}[e^x] + \mathcal{L}[xe^x] = \frac{۱}{s-۱} + \mathcal{L}[xe^x].$$

از طرفی بنابر قضیه قبل داریم

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(0) = s\mathcal{L}[xe^x].$$

بنابراین $s\mathcal{L}[xe^x] = \mathcal{L}[xe^x] + \frac{1}{s-1}$. *درنتیجه* $\mathcal{L}[xe^x](s-1) = \frac{1}{s-1}$ *و ازآنجا داریم* $\mathcal{L}[xe^x] = \frac{1}{(s-1)^2}$.

۵. تبدیل لاپلاس تابع اولیه. اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}.$$

زیرا اگر قرار دهیم $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ آنگاه $g'(x) = f(x)$ و $g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$. بنابراین $\mathcal{L}[g'(x)] = \mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. از طرفی بنابر خاصیت قبل داریم

$$\mathcal{L}[g'(x)] = s\mathcal{L}[g(x)] - g(0) = s\mathcal{L}[g(x)].$$

بنابراین $\mathcal{L}[g(x)] = \frac{F(s)}{s}$.

نتیجه. اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$ آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \int_0^x f(t)dt.$$

مثال ۱۱.۳.۱. *داریم* $\mathcal{L}[x^2e^x] = \frac{2}{(s-1)^3}$. *بنابراین*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x t^2e^tdt\right] = \frac{1}{s}\frac{2}{(s-1)^3} = \frac{2}{s(s-1)^3}.$$

مثال ۱۲.۳.۱. *چون* $\mathcal{L}[\sin 3x] = \frac{3}{s^2+9}$، *پس*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x \sin 3tdt\right] = \frac{1}{s}\frac{3}{s^2+9} = \frac{3}{s(s^2+9)}.$$

مثال ۱۳.۳.۱. *مطلوبست محاسبه* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right)$.

داریم $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-x}$. *بنابراین*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s+1}}{s}\right) = \int_0^x e^{-t}dt = -e^{-t}|_0^x = 1 - e^{-x}.$$

درنتیجه

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s(s+1)}}{s}\right)=\int_0^x(1-e^{-t})dt=(t+e^{-t})|_0^x=x+e^{-x}-1.$$

۶. مشتق تبدیل لاپلاس. هرگاه $\mathcal{L}[f(x)]=F(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}[x^n f(x)]=(-1)^n F^{(n)}(s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(F(s))$$

زیرا

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{ds^n}(F(s))=\frac{d^n}{ds^n}\left(\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\right) &= \int_0^\infty \frac{d^n}{ds^n}(e^{-sx})f(x)dx\\ &= \int_0^\infty (-x)^n e^{-sx}f(x)dx\\ &= (-1)^n\int_0^\infty e^{-sx}x^n f(x)dx\\ &= (-1)^n\mathcal{L}[x^n f(x)]\end{aligned}$$

نتیجه. اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s))=f(x)$ آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}(F^{(n)}(s))=(-1)^n x^n f(x).$$

مثال ۱۴.۳.۱. *می‌دانیم* $\mathcal{L}[\sin 2x]=\frac{2}{s^2+4}$*. با استفاده از قضیه قبل داریم*

$$\mathcal{L}[x\sin 2x]=-\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)=\frac{4s}{(s^2+4)^2}.$$

مثال ۱۵.۳.۱. *داریم* $\mathcal{L}\left[\int_0^x \sin t dt\right]=\frac{1}{s(s^2+1)}$*. بنابراین*

$$\mathcal{L}\left[x^2\int_0^x \sin t dt\right]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)=\frac{6s(2s^2+1)}{(s^2+1)^4}.$$

مثال ۱۶.۳.۱. *مطلوبست محاسبه* $\mathcal{L}^{-1}(\cot^{-1}(s+1))$.

حل. *فرض کنیم* $F(s)=\cot^{-1}(s+1)$ *و* $\mathcal{L}^{-1}(F(s))=f(x)$*. داریم*

$$F'(s)=\frac{-1}{(s+1)^2+1}\implies \mathcal{L}^{-1}(F'(s))=-e^{-x}\sin x.$$

از طرفی بنا بر قضیه مشتق تبدیل لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -xf(x) \implies f(x) = \frac{1}{x}e^{-x}\sin x$$

مثال ۱.۳.۱۷. *تابعی بیابید که تبدیل لاپلاس آن به صورت $\ln\left(\frac{s-1}{s+2}\right)$ باشد.*

قرار می‌دهیم $F(s) = \ln\left(\frac{s-1}{s+2}\right)$. می‌خواهیم $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(\frac{s-1}{s+2}\right)\right)$ را محاسبه کنیم. داریم

$$F(s) = \ln\left(\frac{s-1}{s+2}\right) = \ln(s-1) - \ln(s+2) \longrightarrow F'(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = e^{x} - e^{-2x}.$$

از طرفی بنابر قضیه قبل داریم $\mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = -xf(x)$. در نتیجه $-xf(x) = e^{x} - e^{-2x}$ و از آنجا داریم

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(\frac{s-1}{s+2}\right)\right) = \frac{e^{-2x} - e^{x}}{x}.$$

۷. انتگرال تبدیل لاپلاس.

اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$، آنگاه

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(u)du. \tag{1.1}$$

زیرا

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(u)du &= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-ux}f(x)dx\right)du = \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-ux}f(x)du\right)dx \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{1}{x}e^{-ux}f(x)\right]_{u=s}^{u=\infty} dx = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{f(x)}{x}dx = \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right].\end{aligned}$$

نتیجه. اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty F(u)du\right) = \frac{f(x)}{x}.$$

مثال ۱.۳.۱۸. *تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = \frac{\cos x - e^{-2x}}{x}$ را بیابید.*

حل. *داریم*

$$\mathcal{L}[\cos x - e^{-2x}] = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s+2}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{\cos x - e^{-۲x}}{x}\right] &= \int_s^\infty \left(\frac{u}{u^۲+۱} - \frac{۱}{u+۲}\right) du\\ &= \left[\frac{۱}{۲}\ln(u^۲+۱) - \ln(u+۲)\right]_s^\infty\\ &= \left[\ln\frac{\sqrt{u^۲+۱}}{|u+۲|}\right]_s^\infty\\ &= \ln\frac{|s+۲|}{\sqrt{s^۲+۱}}.\end{aligned}$$

۴.۱ محاسبه انتگرال‌های ناسره به کمک تبدیلات لاپلاس

اگر در رابطه ** قرار دهیم $s=۰$ داریم

$$\int_۰^\infty \frac{f(x)}{x}dx = \int_۰^\infty F(u)du.$$

از رابطه فوق می‌توان برای حل برخی انتگرال‌های ناسره استفاده کرد. همچنین از تعریف تبدیل لاپلاس نیز می‌توان برای حل برخی از انتگرال‌های ناسره استفاده کرد.

مثال ۱.۴.۱. *انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.*

الف) $\int_۰^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. *ب)* $\int_۰^\infty \frac{e^{-\sqrt{۳}x}\sin x}{x}dx$. *ج)* $\int_۰^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$.

حل الف. *داریم* $\mathcal{L}[\sin x] = \frac{۱}{s^۲+۱}$. *بنابراین*

$$\int_۰^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_۰^\infty \frac{۱}{s^۲+۱}ds = \tan^{-۱}(s)|_۰^\infty = \frac{\pi}{۲}.$$

حل ب. *می‌دانیم* $\mathcal{L}[\sin x] = \frac{۱}{s^۲+۱}$. *بنابراین*

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \int_s^\infty \frac{۱}{u^۲+۱}du = \tan^{-۱} u|_s^\infty = \frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱} s.$$

از طرفی بنابر تعریف تبدیل لاپلاس داریم

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \int_۰^\infty \frac{e^{-sx}\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱} s.$$

بنابراین با قرار دادن $s=\sqrt{۳}$ در تساوی بالا نتیجه می‌شود

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{۳}x}\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{۲}-\tan^{-۱}\sqrt{۳}=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}.$$

حل ج. *قرار می‌دهیم $f(x)=e^{-ax}-e^{-bx}$. در نتیجه $F(s)=\mathcal{L}[f(x)]=\frac{۱}{s+a}-\frac{۱}{s+b}$. بنابراین*

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx &= \int_{۰}^{\infty}F(u)du=\int_{۰}^{\infty}\left(\frac{۱}{u+a}-\frac{۱}{u+b}\right)du\\ &= \ln(u+a)-\ln(u+b)|_{۰}^{\infty}=\ln\left(\frac{u+a}{u+b}\right)|_{۰}^{\infty}=\ln(\frac{b}{a}).\end{aligned}$$

مثال ۲.۴.۱. *مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_{۰}^{\infty}x^{۲}\cos x dx$.*

حل. *از آنجائیکه $\mathcal{L}[\cos x]=\frac{s}{s^{۲}+۱}$ داریم*

$$\mathcal{L}[x^{۲}\cos x]=(-۱)^{۲}\frac{d^{۲}}{ds^{۲}}\left(\frac{s}{s^{۲}+۱}\right)=\frac{۲s(s^{۲}-۳)}{(s^{+}۱)^{۳}}=F(s).$$

از طرفی می‌دانیم

$$\mathcal{L}[x^{۲}\cos x]=\int_{۰}^{\infty}e^{-sx}x^{۲}\cos x dx=F(s).$$

پس $\int_{۰}^{\infty}x^{۲}\cos x dx=F(۰)=۰$.

۵.۱ تابع پله‌ای واحد

تابع پله‌ای واحد به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(x)=\begin{cases}۰ & x<۰\\ ۱ & x\geq ۰.\end{cases}$$

در حالت کلی اگر $c\geq ۰$ باشد، داریم

$$u(x-c)=\begin{cases}۰ & x<c\\ ۱ & x\geq c.\end{cases}$$

مثال ۱.۵.۱. *تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد را به دست آورید.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(x-c)] &= \int_{0}^{\infty} e^{-sx}u(x-c)dx = \int_{0}^{c} e^{-sx}u(x-c)dx + \int_{c}^{\infty} e^{-sx}u(x-c)dx \\ &= \int_{c}^{\infty} e^{-sx}dx = -\frac{1}{s}e^{-sx}|_{c}^{\infty} = \frac{e^{-cs}}{s}.\end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{L}[u(x-c)] = \frac{e^{-cs}}{s}$. *همچنین اگر قرار دهیم* $c=0$ *داریم*

$$\mathcal{L}[u(x)] = \frac{1}{s}$$

قضیه ۲.۵.۱. (قضیه دوم انتقال) *اگر* $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ *برای* $s > c > 0$ *موجود باشد، آنگاه*

$$\mathcal{L}[u(x-c)f(x-c)] = e^{-cs}F(s), \quad (s > c).$$

برهان.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(x-c)f(x-c)] &= \int_{0}^{\infty} e^{-sx}u(x-c)f(x-c)dx \\ &= \int_{0}^{c} e^{-sx}u(x-c)f(x-c)dx + \int_{c}^{\infty} e^{-sx}u(x-c)f(x-c)dx \\ &= \int_{c}^{\infty} e^{-sx}f(x-c)dx\end{aligned}$$

با تغییر متغیر $x-c=t$ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(x-c)f(x-c)] &= \int_{c}^{\infty} e^{-sx}f(x-c)dx = \int_{0}^{\infty} e^{-s(t+c)}f(t)dt \\ &= e^{-cs}\int_{0}^{\infty} e^{-st}f(t)dt = e^{-cs}F(s).\end{aligned}$$

■

نتیجه۱. به طور معادل رابطه زیر را داریم

$$\mathcal{L}[u(x-c)f(x)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(x+c)]$$

نتیجه۲. اگر $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-cs}F(s)\right) = u(x-c)f(x-c).$$

مثال ۳.۵.۱. *تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = u(x-\pi)\cos x$ را بیابید.*

$$\mathcal{L}[u(x-\pi)\cos x] = e^{-\pi s}\mathcal{L}[\cos(x+\pi)] = e^{-\pi s}\mathcal{L}[-\cos x] = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^۲+۱}.$$

مثال ۴.۵.۱. *مطلوبست محاسبه $\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{e^{-۴s}}{\sqrt{s-۳}}\right)$.*

حل. *اگر قرار دهیم $F(s) = \frac{۱}{\sqrt{s-۳}}$، آنگاه*

$$\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{s-۳}}\right) = \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{(s-۳)^{\frac{۱}{۲}}}\right) = \frac{۱}{\Gamma(\frac{۱}{۲})}e^{۳x}x^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{e^{۳x}}{\sqrt{\pi x}}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{e^{-۴s}}{\sqrt{s-۳}}\right) = u(x-۴)\frac{e^{۳(x-۴)}}{\sqrt{\pi(x-۴)}}$$

مثال ۵.۵.۱. *اگر $\mathcal{L}[f(x)] = \frac{e^{-\pi s}+۲s}{s^۲+۴s+۵}$، تابع f را بیابید.*

$$\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{e^{-\pi s}+۲s}{s^۲+۴s+۵}\right) = \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s+۲)^۲+۱}\right) + ۲\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s}{(s+۲)^۲+۱}\right).$$

چون $\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{(s+۲)^۲+۱}\right) = e^{-۲x}\sin x$، پس

$$\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s+۲)^۲+۱}\right) = u(x-\pi)e^{-۲(x-\pi)}\sin(x-\pi) = -u(x-\pi)e^{-۲(x-\pi)}\sin x.$$

همچنین

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s}{(s+۲)^۲+۱}\right) &= \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s+۲-۲}{(s+۲)^۲+۱}\right)\\ &= \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s+۲}{(s+۲)^۲+۱}\right) - ۲\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{(s+۲)^۲+۱}\right)\\ &= e^{-۲x}\cos x - ۲e^{-۲x}\sin x.\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}f(x) = \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{e^{-\pi s}+۲s}{s^۲+۴s+۵}\right) &= \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{e^{-\pi s}}{(s+۲)^۲+۱}\right) + ۲\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s}{(s+۲)^۲+۱}\right)\\ &= -u(x-\pi)e^{-۲(x-\pi)}\sin x + ۲(e^{-۲x}\cos x - ۲e^{-۲x}\sin x).\end{aligned}$$

نکته ۶.۵.۱. *به کمک تابع پله‌ای واحد می‌توان تبدیل لاپلاس برخی توابع چند ضابطه‌ای را یافت. هر تابع چند ضابطه‌ای مانند*

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & 0 < x \le a \\ f_2(x) & a < x \le b \\ f_3(x) & b < x \end{cases}$$

را می‌توان به کمک تابع پله‌ای واحد با یک ضابطه به صورت زیر نمایش داد.

$$f(x) = f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x))u(x-a) + (f_3(x) - f_2(x))u(x-b)$$

بنابراین می‌توان تبدیل لاپلاس f را به دست آورد.

مثال ۷.۵.۱. *تبدیل لاپلاس تابع مقابل را بیابید.* $f(x) = \begin{cases} \sin 2x & 0 < x \le \pi \\ 1 & \pi < x \end{cases}$

حل. *به کمک تابه پله‌ای واحد داریم*

$$f(x) = \sin 2x + (1 - \sin 2x)u(x-\pi)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(x)] &= \mathcal{L}[\sin 2x] + \mathcal{L}[(1 - \sin 2x)u(x-\pi)] \\ &= \mathcal{L}[\sin 2x] + \mathcal{L}[u(x-\pi)] - \mathcal{L}[u(x-\pi)\sin 2x] \\ &= \mathcal{L}[\sin 2x] + \mathcal{L}[u(x-\pi)] - \mathcal{L}[u(x-\pi)\sin 2(x-\pi)] \\ &= \frac{2}{s^2+4} + \frac{e^{-\pi s}}{s} - 2\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}. \end{aligned}$$

۶.۱ کاربرد تبدیلات لاپلاس

در این بخش به حل معادلات خطی مرتبه دوم به کمک تبدیلات لاپلاس می‌پردازیم. دقت کنید که تبدیلات لاپلاس را برای یافتن جواب خصوصی معادلات به کار می‌بریم. یعنی معادلاتی را به این روش حل می‌کنیم که همراه با شرایط اولیه لازم بیان شده باشند. از این روش برای حل معادلات خطی مرتبه اول نیز می‌توان استفاده کرد.

۷.۱ حل معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت به صورت $y''+py'+qy=R(x)$ می‌باشد که در آن p و q اعدد ثابت هستند. اگر معادله اخیر همراه با شرایط اولیه به صورت $y(\circ)=a$ و $y'(\circ)=b$ بیان شده باشد، برای حل آن از دو طرف تبدیل لاپلاس می‌گیریم. سپس با استفاده از روابط

$$\mathcal{L}[y']=s\mathcal{L}[y]-y(\circ),\qquad \mathcal{L}[y'']=s^{۲}\mathcal{L}[y]-sy(\circ)-y'(\circ) \tag{۲.۱}$$

می‌توان $\mathcal{L}[y]=F(s)$ را محاسبه کرد و در نتیجه جواب معادله به صورت $y=\mathcal{L}^{-۱}(F(s))$ به دست می‌آید.

مثال ۱.۷.۱. *معادله دیفرانسیل $y''+۴y'+۳y=e^x$ را با شرط $y(\circ)=y'(\circ)=\circ$ حل کنید.*

حل. *با لاپلاس گرفتن از دو طرف معادله داریم.*

$$\mathcal{L}[y'']+۴\mathcal{L}[y']+۳\mathcal{L}[y]=\frac{۱}{s-۱}$$

*با استفاده از رابطه ** داریم $\mathcal{L}[y']=s\mathcal{L}[y]$ و $\mathcal{L}[y'']=s^{۲}\mathcal{L}[y]$. بنابراین با قرار دادن در معادله داریم*

$$s^{۲}\mathcal{L}[y]+۴s\mathcal{L}[y]+۳\mathcal{L}[y]=\frac{۱}{s-۱}\quad\longrightarrow\quad \mathcal{L}[y](s^{۲}+۴s+۳)=\frac{۱}{s-۱}$$

و یا $\mathcal{L}[y]=\frac{۱}{(s-۱)(s+۱)(s+۳)}$. بنابراین

$$\begin{aligned} y=\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{(s-۱)(s+۱)(s+۳)}\right) &= \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{۸}\frac{۱}{s-۱}-\frac{۱}{۴}\frac{۱}{s+۱}+\frac{۱}{۸}\frac{۱}{s+۳}\right)\\ &= \frac{۱}{۸}e^{x}-\frac{۱}{۴}e^{-x}+\frac{۱}{۸}e^{-۳x}\end{aligned}$$

مثال ۲.۷.۱. *مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید.*

$$y''+۲y'+۵y=۳e^{-x}\sin x;\qquad y'(\circ)=۳,\quad y(\circ)=\circ.$$

حل. *از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم.*

$$\mathcal{L}[y'']+۲\mathcal{L}[y']+۵\mathcal{L}[y]=۳\frac{۱}{(s+۱)^{۲}+۱}$$

اما داریم $\mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] - 3$ و $\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y]$. با جایگذاری در معادله بالا به دست می‌آید

$$s^2\mathcal{L}[y] + 3 + 2s\mathcal{L}[y] + 5\mathcal{L}[y] = \frac{3}{(s+1)^2+1}$$

و یا

$$\mathcal{L}[y](s^2+2s+5) = \frac{3}{(s+1)^2+1} - 3 = \frac{3(s+1)^2+6}{(s+1)^2+1}$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[y] = \frac{3(s+1)^2+6}{((s+1)^2+1)(s^2+2s+5)} = \frac{3(s+1)^2+6}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+4)}$$

در نتیجه $y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s+1)^2+6}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+4)}\right)$. برای محاسبه این تبدیل لاپلاس معکوس، قرار می‌دهیم $t = (s+1)^2$. در نتیجه داریم

$$\frac{3(s+1)^2+6}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+4)} = \frac{3t+6}{(t+1)(t+4)}$$

اکنون می‌توان کسر فوق را براحتی تجزیه کرد. داریم

$$\frac{3t+6}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4} = \frac{A(t+4)+B(t+1)}{(t+1)(t+4)} \quad \Rightarrow \quad 3t+6 = A(t+4)+B(t+1)$$

$$t=-1 \quad \to \quad 3 = 3A \ \to A = 1$$

$$t=-4 \quad \to \quad -6 = -3B \ \to B = 2$$

در نتیجه

$$\frac{3t+6}{(t+1)(t+4)} = \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t+4} = \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

بنابراین جواب معادله عبارتست از

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s+1)^2+6}{((s+1)^2+1)((s+1)^2+4)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2+4}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right) = e^{-x}\sin x + e^{-x}\sin 2x. \end{aligned}$$

مثال ۳.۷.۱. *جواب خصوصی معادله دیفرانسیل* $y'' - ۳y' + ۲y = ۴e^{۲x}$ *را که در شرایط* $y(۰) = -۳$ *و* $y'(۰) = ۰$ *صدق می‌کند را به دست آورید.*

حل. *با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف معادله داریم* $\mathcal{L}[y''] - ۳\mathcal{L}[y'] + ۲\mathcal{L}[y] = \frac{۴}{(s-۲)}$. *اما داریم* $\mathcal{L}[y''] = s^۲\mathcal{L}[y] + ۳s$ *و* $\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y] + ۳$. *بنابراین* $s^۲\mathcal{L}[y] + ۳s - ۳s\mathcal{L}[y] - ۹ + ۲\mathcal{L}[y] = \frac{۴}{(s-۲)}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] \quad (s^۲ - ۳s + ۲) &= \frac{۴}{(s-۲)} - ۳s + ۹\\ \mathcal{L}[y] \quad &= \frac{۴}{(s-۲)(s^۲-۳s+۲)} + \frac{-۳s+۹}{s^۲-۳s+۲} = \frac{-۳s^۲+۱۵s-۱۴}{(s-۱)(s-۲)^۲}\end{aligned}$$

با تجزیه کسر سمت راست به دست می‌آوریم

$$\frac{-۳s^۲+۱۵s-۱۴}{(s-۱)(s-۲)^۲} = \frac{۴}{(s-۲)^۲} - \frac{۲}{s-۱} - \frac{۱}{s-۲}$$

بنابراین جواب معادله عبارتست از

$$\begin{aligned}y = \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{-۳s^۲+۱۵s-۱۴}{(s-۱)(s-۲)^۲}\right) &= \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۴}{(s-۲)^۲} - \frac{۲}{s-۱} - \frac{۱}{s-۲}\right)\\ &= ۴xe^{۲x} - ۲e^{x} - e^{۲x}.\end{aligned}$$

۸.۱ حل معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر

هدف از این بخش، حل معادلات خطی مرتبه دوم به صورت $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ می‌باشد که همراه با شرایط اولیه بیان شده‌اند. برای حل معادله فوق از دو طرف تبدیل لاپلاس می‌گیریم. قرار می‌دهیم $\mathcal{L}[y] = A$. بنابراین با استفاده از خواص تبدیلات لاپلاس داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'] &= s\mathcal{L}[y] - y(۰) = sA - y(۰).\\ \mathcal{L}[y''] &= s^۲\mathcal{L}[y] - sy(۰) - y'(۰) = s^۲A - sy(۰) - y'(۰).\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از رابطه $\mathcal{L}[x^n f(x)] = (-۱)^n \frac{d^۲}{ds^n}(\mathcal{L}[f(x)])$، می‌توان تبدیل لاپلاس هر یک از عبارات داخل معادله را بر حسب A نوشت. به عنوان مثال

$$\mathcal{L}[xy'] = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y']) = -\frac{d}{ds}(sA - y(۰)) = -(A + s\frac{dA}{ds})$$

مثال ۱.۸.۱. *مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید.*

$$xy'' + xy' + ۲y = ۰, \qquad y(۰) = y'(۰) = ۰.$$

حل. *از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم.* $\mathcal{L}[xy'' + xy' + ۲y] = ۰$.

$$\mathcal{L}[xy''] + \mathcal{L}[xy'] + ۲\mathcal{L}[y] = ۰$$

قرار می‌دهیم $\mathcal{L}[y] = A$*. داریم*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y'] &= s\mathcal{L}[y] - y(۰) = s\mathcal{L}[y] = sA \\
\mathcal{L}[y''] &= s^۲\mathcal{L}[y] - sy(۰) - y'(۰) = s^۲\mathcal{L}[y] = s^۲A \\
\mathcal{L}[xy''] &= -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y'']) = -\frac{d}{ds}(s^۲A) = -(۲sA + s^۲\frac{dA}{ds}) \\
\mathcal{L}[xy'] &= -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y']) = -\frac{d}{ds}(sA) = -(A + s\frac{dA}{ds})
\end{aligned}$$

با قرار دادن در معادله به دست می‌آوریم

$$-(۲sA + s^۲\frac{dA}{ds}) - (A + s\frac{dA}{ds}) + ۲A = ۰$$

در نتیجه

$$-(s^۲ + s)\frac{dA}{ds} - (۲s - ۱)A = ۰ \quad \Longrightarrow \quad \frac{\frac{dA}{ds}}{A} = \frac{۱ - ۲s}{s^۲ + s}$$

که یک معادله تفکیک‌پذیر بر حسب A *می‌باشد. با انتگرال‌گیری از دو طرف داریم*

$$\ln|A| = \int\left(\frac{۱ - ۲s}{s^۲ + s}\right)ds = \int\left(\frac{۱}{s} - \frac{۳}{s + ۱}\right)ds = \ln s - ۳\ln(s + ۱) = \ln\left(\frac{s}{(s + ۱)^۳}\right)$$

بنابراین $A = \frac{s}{(s+۱)^۳}$ *و از آنجا داریم*

$$\begin{aligned}
y &= \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s}{(s + ۱)^۳}\right) = \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{s + ۱ - ۱}{(s + ۱)^۳}\right) = \mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۱}{(s + ۱)^۲}\right) - \frac{۱}{۲}\mathcal{L}^{-۱}\left(\frac{۲}{(s + ۱)^۳}\right) \\
&= xe^{-x} - \frac{۱}{۲}x^۲e^{-x}.
\end{aligned}$$

مثال ۱.۸.۲. *جوابی از معادله دیفرانسیل* $xy''+(2x+3)y'+(x+3)y=3e^{-x}$ *را با شرط اولیه* $y(0)=0$ *بیابید.*

حل. $\mathcal{L}[xy''+(2x+3)y'+(x+3)y]=\mathcal{L}[3e^{-x}]$.

$$\mathcal{L}[xy'']+2\mathcal{L}[xy']+3\mathcal{L}[y']+\mathcal{L}[xy]+3\mathcal{L}[y]=\frac{3}{s+1}$$

قرار می‌دهیم $\mathcal{L}[y]=A$. *بنابراین*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y'] &= s\mathcal{L}[y]-y(0)=s\mathcal{L}[y]=sA\\
\mathcal{L}[y''] &= s^2\mathcal{L}[y]-sy(0)-y'(0)=s^2\mathcal{L}[y]-y'(0)=s^2A-y'(0)\\
\mathcal{L}[xy''] &= -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y''])=-\frac{d}{ds}(s^2A-y'(0))=-(2sA+s^2\frac{dA}{ds})\\
\mathcal{L}[xy'] &= -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y'])=-\frac{d}{ds}(sA)=-(A+s\frac{dA}{ds})\\
\mathcal{L}[xy] &= -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[y])=-\frac{dA}{ds}
\end{aligned}$$

باجایگذاری در معادله داریم

$$-(2sA+s^2\frac{dA}{ds})-2(A+s\frac{dA}{ds})+3sA-\frac{dA}{ds}+3A=\frac{3}{s+1}$$

بنابراین

$$-(s+1)^2\frac{dA}{ds}+(s+1)A=\frac{3}{s+1}\quad\Longrightarrow\quad\frac{dA}{ds}-\frac{1}{s+1}A=-\frac{3}{(s+1)^3}$$

معادله فوق، یک معادله خطی مرتبه اول بر حسب A *می‌باشد. بنابراین*

$$\begin{aligned}
A &= e^{-\int P(s)ds}\left(\int Q(s)e^{\int P(s)ds}ds\right)=e^{\int\frac{1}{s+1}ds}\left(-3\int\frac{1}{(s+1)^3}e^{-\int\frac{1}{s+1}ds}ds\right)\\
&= (s+1)\left(-3\int\frac{1}{(s+1)^4}ds\right)=\frac{1}{(s+1)^2}.
\end{aligned}$$

بنابراین جواب معادله عبارتست از $y=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)=xe^{-x}$.

۱.۹ کانولوشن (پیچش)

تعریف ۱.۹.۱. *برای هر دو تابع* $f(x)$ *و* $g(x)$*، کانولوشن* f *و* g *را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.*

$$Con(f,g)(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

دقت کنید که کانولوشن دو تابع $f(x)$ و $g(x)$، خود تابعی دیگر است. کانولوشن دو تابع f و g را با نماد $(f*g)$ نیز نمایش می‌دهند و آنرا تلفیق f و g نیز می‌نامند.

مثال ۲.۹.۱. *اگر $f(x)=e^{۲x}$ و $g(x)=x$ و $h(x)=\sin ۳x$ آنگاه داریم*

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{۰}^{x} f(t)g(x-t)dt=\int_{۰}^{x} e^{۲t}(x-t)dt=\int_{۰}^{x} xe^{۲t}dt-\int_{۰}^{x} te^{۲t}dt\\ &= \frac{۱}{۲}xe^{۲t}|_{۰}^{x}-(\frac{۱}{۲}te^{۲t}-\frac{۱}{۴}e^{۲t})|_{۰}^{x}=(\frac{۱}{۲}xe^{۲x}-\frac{۱}{۲}x)-(\frac{۱}{۲}xe^{۲x}-\frac{۱}{۴}e^{۲x}+\frac{۱}{۴})\\ &= \frac{۱}{۴}(e^{۲x}-۲x-۱).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(h*f)(x) &= \int_{۰}^{x} h(t)f(x-t)dt=\int_{۰}^{x}(\sin ۳t)e^{۲(x-t)}dt=\int_{۰}^{x}(\sin ۳t)e^{۲x}e^{-۲t}dt\\ &= e^{۲x}\int_{۰}^{x}(\sin ۳t)e^{-۲t}dt=e^{۲x}\left[\frac{e^{-۲t}}{۱۳}(-۲\sin ۳t-۳\cos ۳t)\right]_{۰}^{x}\\ &= e^{۲x}\left(\frac{e^{-۲x}}{۱۳}(-۲\sin ۳x-۳\cos ۳x)+\frac{۳}{۱۳}\right)\\ &= \frac{۱}{۱۳}\left(۳e^{۲x}-۲\sin ۳x-۳\cos ۳x\right)\end{aligned}$$

نکته ۳.۹.۱. *کانولوشن دو تابع f و g دارای خواص زیر است.*

۱) *خاصیت جابجایی* $f*g=g*f$

۲) *خاصیت شرکت‌پذیری* $f*(g*h)=(f*g)*h$

۳) *خاصیت توزیع‌پذیری نسبت به جمع* $f*(g+h)=f*g+f*h$

۴) $f*۰=۰*f=۰$

خواص بالا به راحتی از تعریف کانولوشن دو تابع نتیجه می‌شوند. در اینجا خاصیت جابجایی که برای ما مهم‌تر می‌باشد را ثابت می‌کنیم. داریم $(f*g)(x)=\int_{۰}^{x} f(t)g(x-t)dt$.
اگر در انتگرال فوق از تغییر متغیر $x-t=u$ استفاده کنیم داریم $dt=-du$ و در نتیجه

$$(f*g)(x)=\int_{۰}^{x} f(t)g(x-t)dt=-\int_{x}^{۰} f(x-u)g(u)du=\int_{۰}^{x} f(x-u)g(u)du=(g*f)(x)$$

اکنون فرض کنیم f و g دو تابع لاپلاس‌پذیر باشند. در اینصورت به دنبال تابعی مانند h هستیم به طوری که $\mathcal{L}[h(x)]=\mathcal{L}[f(x)]\mathcal{L}[g(x)]$. به عبارت دیگر اگر $\mathcal{L}[f(x)]=F(s)$ و $\mathcal{L}[g(x)]=G(s)$، آنگاه به دنبال یافتن $\mathcal{L}^{-۱}(F(s)G(s))$ هستیم.

قضیه ۴.۹.۱. *اگر* $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ *و* $\mathcal{L}[g(x)] = G(s)$*، آنگاه* $\mathcal{L}[(f * g)(x)] = F(s).G(s)$. *به عبارت دیگر اگر* $\mathcal{L}^{-۱}(F(s)) = f(x)$ *و* $\mathcal{L}^{-۱}(G(s)) = g(x)$*، آنگاه*

$$\mathcal{L}^{-۱}(F(s)G(s)) = (f * g)(x)$$

برهان.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(f * g)(x)] &= \int_۰^\infty e^{-sx}(f * g)(x)dx = \int_۰^\infty e^{-sx}\left(\int_۰^x f(t)g(x-t)dt\right)dx \\ &= \int_۰^\infty \int_۰^x e^{-sx} f(t)g(x-t)dtdx\end{aligned}$$

با توجه به شکل ناحیه انتگرال‌گیری در انتگرال دوگانه بالا، می‌توان ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر داد. داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[(f * g)(x)] &= \int_۰^\infty \int_۰^x e^{-sx} f(t)g(x-t)dtdx = \int_۰^\infty \int_t^\infty e^{-sx} f(t)g(x-t)dxdt \\ &= \int_۰^\infty f(t)\int_t^\infty e^{-sx} g(x-t)dxdt\end{aligned}$$

با تغییر متغیر $x - t = u$ در انتگرال داخلی داریم

$$\int_۰^\infty f(t)\int_t^\infty e^{-sx}g(x-t)dxdt = \int_۰^\infty f(t)\int_۰^\infty e^{-s(u+t)}g(u)dudt$$
$$= \int_۰^\infty f(t)e^{-st}\int_۰^\infty e^{-su}g(u)dudt = \int_۰^\infty f(t)e^{-st}dt\int_۰^\infty e^{-su}g(u)du = F(s)G(s).$$

■

مثال ۵.۹.۱. *تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.*

الف) $f(x) = \int_۰^x t^۲ \sin(x-t)dt$.　　　　*ب)* $g(x) = e^x \int_۰^x e^{-t}t^۵ dt$.

حل الف. با استفاده از قضیه فوق داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_۰^x t^۲\sin(x-t)dt\right] &= \mathcal{L}[(x^۲) * (\sin x)] = \mathcal{L}[x^۲].\mathcal{L}[\sin x] \\ &= \frac{۲}{s^۳}.\frac{۱}{s^۲+۱} = \frac{۲}{s^۳(s^۲+۱)}.\end{aligned}$$

حل ب.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^x\int_0^x e^{-t}t^5dt\right] &= \mathcal{L}[\int_0^x e^{x-t}t^5dt] = \mathcal{L}[e^x * x^5]\\ &= \mathcal{L}[e^x].\mathcal{L}[x^5] = \frac{1}{s-1}.\frac{5!}{s^6} = \frac{5!}{s^6(s-1)}.\end{aligned}$$

مثال ۶.۹.۱. *مطلوبست محاسبه*

الف) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right)$. *ب)* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right)$. **حل الف.** *قرار می‌دهیم*

$$F(s) = (\frac{1}{s^2}) \implies f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = x$$
$$G(s) = \frac{1}{s^2+4} \implies g(x) = \mathcal{L}^{-1}(G(s) = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f*g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)\sin 2t\\ &= \frac{1}{2}\left(x\int_0^x \sin 2tdt - \int_0^x t\sin 2tdt\right)\\ &= \left[-\frac{1}{2}x\cos 2t + \frac{1}{2}t\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^x\\ &= \frac{1}{8}(2x - \sin 2x).\end{aligned}$$

حل ب. *روش اول: استفاده از کانولوشن. اگر قرار دهیم*

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \implies f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sin x$$
$$G(s) = \frac{s}{s^2+1} \implies g(x) = \mathcal{L}^{-1}(G(s) = \cos x.$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} &\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f*g)(x) = \int_0^x \cos t\sin(x-t)dt\\ &= \int_0^x \cos t(\sin x\cos t - \cos x\sin t)dt = \sin x\int_0^x \cos^2 tdt - \cos x\int_0^x \cos t\sin tdt\\ &= \frac{\sin x}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^x - \cos x\left[-\frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^x\\ &= \frac{\sin x}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) - \cos x(-\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}x\sin x.\end{aligned}$$

روش دوم. قرار می‌دهیم $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$ *. بنابراین* $F'(s)=\frac{-2s}{(s^2+1)^2}$.
همچنین $f(x)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\sin x$ *. از طرفی با استفاده از فرمول مشتق تبدیل لاپلاس داریم*

$$\mathcal{L}^{-1}(F'(s))=-xf(x)=-x\sin x.$$

بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right)=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right)=-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(F'(s))=\frac{1}{2}x\sin x.$$

۱۰.۱ معادلات دیفرانسیل انتگرالی

به ازای توابع معلوم $f(x)$ و $g(x)$ و تابع مجهول $y(x)$ و ثابت معین k، هر معادله به فرم

$$f(x)=y(x)+k\int_0^x g(x-t)y(t)dt$$

را یک معادله انتگرالی گوئیم.
روش حل. هدف یافتن تابع مجهول $y(x)$ می‌باشد. برای حل معادله انتگرالی مانند معادله بالا، از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم. داریم

$$\mathcal{L}[f(x)]=\mathcal{L}[y(x)]+k\mathcal{L}\left[\int_0^x g(x-t)y(t)dt\right]$$

بنابر قضیه کانولوشن داریم

$$\mathcal{L}[f(x)]=\mathcal{L}[y(x)]+k\mathcal{L}[g(x)]\mathcal{L}[y(x)] \implies \mathcal{L}[y(x)]=\frac{\mathcal{L}[f(x)]}{1+k\mathcal{L}[g(x)]}=\frac{F(s)}{1+kG(s)}$$

بنابراین جواب معادله به صورت $y(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{1+kG(s)}\right)$ به دست می‌آید.

مثال ۱.۱۰.۱. *معادله انتگرالی مقابل را حل کنید.* $3\sin 2x=y(x)+\int_0^x(x-t)y(t)dt$
حل. *اگر از دو طرف تبدیل لاپلاس بگیریم داریم*

$$3\mathcal{L}[\sin 2x]=\mathcal{L}[y(x)]+\mathcal{L}[x]\mathcal{L}[y(x)] \implies \frac{6}{s^2+4}=\mathcal{L}[y(x)]+\frac{1}{s^2}\mathcal{L}[y(x)]$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[y(x)]=\frac{\frac{6}{s^2+4}}{1+\frac{1}{s^2}}=\frac{6s^2}{(s^2+1)(s^2+4)} \implies y(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$$

اگر قرار دهیم $F(s)=\frac{6s}{s^2+1}$ *و* $G(s)=\frac{s}{s^2+4}$*، آنگاه* $f(x)=6\cos x$ *و* $g(x)=\cos 2x$. *در نتیجه*

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s))=(f*g)(x)=6\int_0^x \cos t\cos 2(x-t)dt \\ &= 6\left(\int_0^x \cos t\cos 2x\cos 2t dt-\int_0^x \cos t\sin 2x\sin 2t\right)dt \\ &= \left(\cos 2x(4\sin 3x-6\sin x)+4\sin 2x(\cos^3 x-1)\right). \end{aligned}$$

مثال ۲.۱۰.۱. *معادله انتگرالی مقابل را حل کنید.* $3e^x\sin 3x-y(x)=3\int_0^x e^{x-t}(x-t)y(t)dt$

حل. *با اعمال تبدیل لاپلاس به دو طرف معادله به دست می‌آوریم*

$$3\mathcal{L}[e^x\sin 3x]-\mathcal{L}[y(x)]=3\mathcal{L}\left[\int_0^x e^{x-t}(x-t)y(t)dt\right]=3\mathcal{L}[xe^x]\mathcal{L}[y]$$

$$\implies \frac{9}{(s-1)^2+9}-\mathcal{L}[y(x)]=\frac{3}{(s-1)^2}\mathcal{L}[y(x)]$$

بنابراین

$$\mathcal{L}[y(x)]=\frac{\frac{9}{(s-1)^2+9}}{1+\frac{3}{(s-1)^2}}=\frac{9(s-1)^2}{((s-1)^2+9)((s-1)^2+3)}$$

قرار می‌دهیم $u=(s-1)^2$. *در نتیجه*

$$\begin{aligned} \frac{9(s-1)^2}{((s-1)^2+9)((s-1)^2+3)} &= \frac{9u}{(u+3)(u+9)}=\frac{\frac{9}{2}}{u+9}-\frac{\frac{9}{2}}{u+3} \\ &= \frac{\frac{9}{2}}{(s-1)^2+9}-\frac{\frac{9}{2}}{(s-1)^2+3} \end{aligned}$$

بنابراین جواب معادله عبارتست از

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{9}{2}}{(s-1)^2+9}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{9}{2}}{(s-1)^2+3}\right) \\ &= \frac{3}{2}e^x\sin 3x-\frac{3\sqrt{3}}{2}e^x\sin\sqrt{3}x \end{aligned}$$